Dieffeln, 21.12.2010

Der „wahre" Wert der Gravitationskonstanten G?

Von Martin Bock

Das Fragezeichen bedeutet, dass Formel (**I.1**) nur eine Arbeitshypothese ist, weil der dargestellte physikalische Zusammenhang unvereinbar erscheint mit Artikel „Gravitation in Elementareinheiten", Seite 7"! Ansonsten würde in der vorliegenden Ausarbeitung der Wert der Gravitationskonstanten G mit einer um vier Größenordnungen auf $\pm 5{,}0 \cdot 10^{-8}$ verbesserten Genauigkeit berechnet und der „Beweis" für die Richtigkeit der Rechenmethode erbracht sein.

Herleitung der Rechenmethode

Zur Berechnung des Wertes der Gravitationskonstanten greifen wir zurück auf die in „Basis Units of Physic, Geilhaupt (S.3 u. 10)" bzw. „Fundamental Unit Momentum, Geilhaupt, Wilcoxe, S.2 (5)" bzw. Dimensionen und Naturkonstanten) für die Dimension $1kgm/s$ aufgeführte Formel

(I.1)… $\boxed{1kg \underbrace{=}_{Behauptung} \left(10^7 \frac{A}{V}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\alpha\right) \cdot Z_0 \cdot M_P \underbrace{+ 1{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot kg}_{Abweichung}}$. Hierbei ist Z_0 Impedanz $[V/A]$

(I.2)… $\boxed{Z_0 = \frac{h}{e_0^2}}$ mit **(I.3)**… $\boxed{e_0^2 = \underbrace{\frac{e^2}{2\alpha}}_{Sommerfeld} = hc\varepsilon_0 = \frac{h}{\mu_0 \cdot c}}$ und e_0^2 als Einstein'sche naked Charge.

h ist das Planck'sche Wirkungsquantum, α die Sommerfeldkonstante und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, M_P ist die Planckmasse gemäß

(I.4)… $\boxed{\underbrace{M_P^2}_{pure} = \frac{hc}{G}}$ mit **(I.5)**… $\boxed{G = 6{,}67428(67) \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m^3}{s^2 kg} \pm 1{,}0 \cdot 10^{-4}}$ nach Codata.

Der in Klammern stehende Zahlenwert bezieht sich auf die beiden letzten Stellen des Zahlenwertes von G. Also beträgt der G-Zahlenwert $6{,}67428 \pm 0{,}00067$, was mit $\frac{0{,}00067}{6{,}67428}$ zu $1{,}0 \cdot 10^{-4}$ führt. Dies bedeutet gemäß Definition, dass der wahre Wert für G mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% innerhalb einer Bandbreite von $6{,}67428 \pm 0{,}00067$ liegt. Der maximal zulässige G-Zahlenwert beträgt $6{,}67428 + 0{,}00067 = 6{,}67495$ und der minimal zulässige Zahlenwert $6{,}67428 - 0{,}00067 = 6{,}67369$. Diese Wertegrenzen sind zwingend einzuhalten! Über die Gravitationskonstante ist also der zulässige Korridor

(I.6)… $\boxed{u = \left(\frac{1}{1 \pm 1{,}0 \cdot 10^{-4}}\right)^{1/2} = \pm 5 \cdot 10^{-5} = \max. \pm 5{,}444.. \cdot 10^{-5}}$ einzuhalten. Hierbei ist unterstellt, dass die Ungenauigkeit der übrigen und im Vergleich zu G hochgenauen Konstanten vernachlässigbar ist. Damit liegt Formel (I.1) außerhalb der zulässigen Unsicherheit. Um Abhilfe zu schaffen wird die Substitution $h = m_{ps} \cdot c \cdot \lambda$ eingeführt. Es ergibt sich dann für die Planckmasse

$\underbrace{M_p^2}_{pure} = m_{ps} c^2 \lambda / G$ mit m_{ps} als statischer Protonmasse und λ als Elementarlänge.

Zur Definition von $1kg$ ist die gesamte Protonmasse $m_p = m_{ps} \cdot \left(1 + \frac{2}{9}\frac{\varphi\, \alpha}{4\pi}\right)$ maßgebend gemäß

(I.8)... $$\boxed{1kg = \left(10^7\frac{A}{V}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\alpha\right)\cdot\left[\underbrace{\frac{2\alpha h}{e^2}}_{Z_0}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{2}{9}\cdot\frac{\varphi\alpha}{4\pi}\right)}_{Erweiterung}\right]\cdot\underbrace{\left(\frac{hc}{G}\right)^{\frac{1}{2}}}_{M_0}+\underbrace{1{,}6\cdot10^{-5}}_{Abweichung}}.$$

Damit sind wir zwar wieder am Anfang unserer Überlegungen angelangt haben aber nunmehr eine Struktur, die mit $-1{,}6\cdot10^{-5}$ innerhalb der zulässigen Bandbreite von $\pm 5{,}444..\cdot10^{-5}$ liegt (obige Formel liefert etwas zu kleine Werte, daher steht dort ein Pluszeichen). Damit ist dieses Ergebnis akzeptabel. Allerdings muss in (I.2) für die Impedanz Z_0 (nicht für M_p) eine Erweiterung eingeführt werden, die sich auf die Protonmasse als Ganzes bezieht, nämlich auf m_p.

Substitution $10^7\frac{A}{V}=\frac{1}{10^7\cdot\frac{V}{A}}\cdot\frac{\frac{s}{m}\cdot4\pi}{\frac{s}{m}\cdot4\pi}=\frac{1}{4\pi\cdot10^7\cdot\frac{Vs}{Am}}\cdot\frac{s}{m}\cdot4\pi=\frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{s}{m}\cdot4\pi\cdot\frac{c^2}{c^2}$ liefert

(I.9)... $\boxed{10^7\frac{A}{V}=4\pi\varepsilon_0c^2\cdot\left(\frac{s}{m}\right)}$ und einsetzen in Formel (I.8) ergibt

$$1kg = 4\pi\varepsilon_0c^2\cdot\left(\frac{s}{m}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\alpha\right)\cdot\frac{2\alpha h}{e^2}\cdot\left(1+\frac{2}{9}\cdot\frac{\varphi\alpha}{4\pi}\right)\cdot\left(\frac{hc}{G}\right)^{\frac{1}{2}}$$ bzw. mit $\boxed{\varepsilon_0=\frac{e^2}{2\alpha hc}}$

$$1kg = 4\pi\frac{e^2}{2\alpha hc}c^2\cdot\left(\frac{s}{m}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\alpha\right)\cdot\frac{2\alpha h}{e^2}\cdot\left(1+\frac{2}{9}\cdot\frac{\varphi\alpha}{4\pi}\right)\cdot\left(\frac{hc}{G}\right)^{\frac{1}{2}}$$ und hieraus

(I.10)... $$\boxed{1\frac{kgm}{s}=4\pi\cdot c\cdot\left(\frac{2}{3}\alpha\right)\cdot\overbrace{\left(1+\frac{2}{9}\cdot\frac{\varphi\alpha}{4\pi}\right)}^{Erweiterung}\cdot\left(\frac{hc}{G}\right)^{\frac{1}{2}}+1{,}6\cdot10^{-5}}$$

Mit dem $\pm 1{,}0\cdot10^{-4}$ genauen Wert von G liefert Formel (I.10) eine Abweichung von $-1{,}6\cdot10^{-5}$ vom Zielwert $1kgm/s$. Die Abweichung liegt um eine Größenordnung innerhalb der zulässigen Wertetoleranz von G. Daher lässt sich mit Formel (I.10) unmittelbar der Wert für die Gravitationskonstante so einstellen, dass Formel (I.10) exakt $1kgm/s$ liefert. Es ergibt sich

(I.11)... $\boxed{G=6{,}674\,069\,78\,(66)\cdot10^{-11}\cdot\frac{m^3}{s^2kg}}$ bisher: $\boxed{G=6{,}674\,28\,(67)\cdot10^{-11}\cdot\frac{m^3}{s^2kg}}$

Die Genauigkeit dieses Wertes liegt im Rahmen der Messgenauigkeit der Naturkonstanten, wie z. B. von α, c, e und h also im Bereich rd. $\pm 5{,}0\cdot10^{-8}$. Aus Formel (I.10) kann, wie im nächsten Abschnitt bewiesen wird, unmittelbar die Coulombkraft in der Größe von $F=2\cdot10^{-7}\cdot N$ hergeleitet werden. Das ist die Kraft, die sich bei einer Stromstärke von $1A$ im Abstand $1m$ zwischen zwei Stromleitern ergibt. Dies ist die Definition der Einheit $1A$. Da diese Definition exakt ist, muss auch Formel (I.10) in gleicher Weise exakt sein! Die folgende Herleitung beweist also, dass neben der v.g. Erweiterung keine Feinkorrekturen aus physikalischen Sub-Strukturen existieren, die in (I.10) zu berücksichtigen wären. Dies bedeutet, dass mit Formel (I.10) der Wert der Gravitationskonstante G so exakt bestimmt werden kann, dass sich die Werte-Genauigkeit gegenüber dem bisherigen Messwert um vier(!) Größenordnungen von $\pm 1{,}0\cdot10^{-4}$ auf $\pm 5{,}0\cdot10^{-8}$ verbessert.

Beweis der Richtigkeit der Rechenmethode

Wir beginnen mit der Substitution $\boxed{2\alpha c = \frac{\mu_0 \cdot e^2}{\tau \cdot m_{ps}}}$. (An dieser Formel sieht man, dass m_{ps} kein Kunstgebilde ist.) Aus der Sommerfeldformel $e^2 = 2\alpha hc\varepsilon_0$ ergibt sich $e^2 = \frac{2\alpha h}{c} c^2 \varepsilon_0 = \frac{2\alpha h}{c} \cdot \frac{1}{\mu_0}$ also $e^2 \cdot \mu_0 = \frac{2\alpha h}{c}$ und aus $\tau \cdot m_{ps} \cdot c \cdot \lambda = \tau \cdot h$ ergibt sich $\tau \cdot m_{ps} = \frac{\tau \cdot h}{c \cdot \lambda}$ und mit $c = \lambda / \tau$ erhält man $\tau \cdot m_{ps} = \frac{h}{c^2}$, womit $\frac{\mu_0 \cdot e^2}{\tau \cdot m_{ps}} = \frac{c^2}{h} \cdot \frac{2\alpha h}{c} = 2\alpha c$ ist. Einsetzen in (I.10) ergibt dann

(I.12)... $\boxed{1\frac{kgm}{s} = 4\pi \cdot \frac{\mu_0 \cdot e^2}{\tau \cdot m_{ps}} \cdot \left(\frac{hc}{G}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{2}{9} \cdot \frac{\varphi\alpha}{4\pi}\right)}$.

Mit $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{Vs}{Am}$ und mit $\boxed{e^2 = \underbrace{|e|}_{\substack{Betrag \\ von\, e^2}}{}^2 \cdot (1As)^2}$ und kann man schreiben

$1\frac{kgm}{s} = 4\pi \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{Vs}{Am} \cdot |e|^2 \cdot (1As)^2}{\tau \cdot m_{ps}} \cdot \left(\frac{hc}{G}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{2}{9} \cdot \frac{\varphi\alpha}{4\pi}\right)$. Dimensionen auf die linke Gleichungsseite ziehen ergibt $1\frac{kgm}{s} \cdot \frac{Am}{Vs} \cdot \frac{1}{A^2 s^2} = 4\pi \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot |e|^2}{\tau \cdot m_{ps}} \cdot \left(\frac{hc}{G}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{2}{9} \cdot \frac{\varphi\alpha}{4\pi}\right)$.

Ausmultiplizieren der Dimensionen führt zu $1\frac{kgm}{s} \cdot \frac{Am}{Vs} \cdot \frac{1}{A^2 s^2} = 1\frac{kgm}{s^2} \cdot \frac{m}{Vs} \cdot \frac{1}{As} = 1\frac{Nm}{s} \cdot \frac{1}{VA} \cdot \frac{1}{s}$

(I.13)... $\boxed{\frac{1}{s} = 4\pi \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot |e|^2}{\tau \cdot m_{ps}} \cdot \left(\frac{hc}{G}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{2}{9} \cdot \frac{\varphi\alpha}{4\pi}\right)}$

Umordnen ergibt $\frac{1}{s} \cdot m_{ps} \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot 10^7 \cdot \frac{1}{|e|^2} = \frac{4\pi}{\tau} \cdot \left(\frac{hc}{G}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{2}{9} \cdot \frac{\varphi\alpha}{4\pi}\right)$. Erweitern mit $\varphi\alpha \cdot \lambda \cdot 2$ führt auf $\frac{1}{s} \cdot \underbrace{m_{ps} \cdot \frac{\varphi\alpha}{4\pi}}_{= m_{es}} \cdot 10^7 \cdot \frac{1}{|e|^2} \cdot \lambda \cdot 2 = \underbrace{\frac{\lambda}{\tau}}_{= c} \cdot 4\pi \cdot \left(\frac{hc}{G}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3}\varphi\alpha \cdot \left(1 + \frac{2}{9} \cdot \frac{\varphi\alpha}{4\pi}\right)$ bzw.

(I.14)... $\boxed{\frac{1}{s} \cdot m_{es} \cdot \lambda \cdot \frac{1}{\varphi} \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot \frac{1}{|e|^2} \equiv \underbrace{c \cdot 4\pi \cdot \left(\frac{hc}{G}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3}\alpha \cdot \left(1 + \frac{2}{9} \cdot \frac{\varphi\alpha}{4\pi}\right) = 1\frac{kgm}{s}}_{= 1\frac{kgm}{s}\ s.\ Formel\ (I.10)}}$

Wie zu sehen, ist die rechte Gleichungsseite identisch mit Formel (I.10). Folglich ist die linke Gleichungsseite ebenfalls gleich $1kgm/s$. Damit beschäftigen wir uns ab hier mit dem Ausdruck auf der linken Gleichungsseite. Im Folgenden wird bewiesen, dass dieser aus der Coulomb-Kraft von $F = 2 \cdot 10^{-7} \cdot N$ resultiert, die sich bei Stromstärke von $1A$ im Abstand $1m$ ergibt.

(I.15)… $\boxed{1\frac{kgm}{s} = \frac{1}{s}\cdot m_{es}\cdot\lambda\cdot\frac{1}{\varphi}\cdot 2\cdot 10^{7}\cdot\frac{1}{|e|^2}}$. Das ist die linke Seite der Gleichung (I.14)

Division beider Gleichungsseiten durch $1s$ führt zu $1\frac{kgm}{s^2} = 1N = \frac{1}{s^2}\cdot m_{es}\cdot\lambda\cdot\frac{1}{\varphi}\cdot 2\cdot 10^{7}\cdot\frac{1}{|e|^2}$

und mit $\boxed{|\tau|\cdot 1s = \tau}$ kann man schreiben $1N = \frac{m_{es}\cdot\lambda}{\tau^2}\cdot\frac{1}{\varphi}\cdot 2\cdot 10^{7}\cdot\frac{|\tau|^2}{|e|^2}$. Erweitern mit $\frac{|c|^2}{|c|^2}$ ergibt

$1N = \frac{m_{es}\cdot\lambda}{\tau^2}\cdot\frac{1}{\varphi}\cdot 2\cdot 10^{7}\cdot\frac{|\tau|^2}{|e|^2}\cdot\frac{|c|^2}{|c|^2}$ und mit $|c|^2 = \left|\frac{\lambda}{\tau}\right|^2$ erhält man

$1N = \frac{m_{es}\cdot\lambda}{\tau^2}\cdot\frac{1}{\varphi}\cdot 2\cdot 10^{7}\cdot\frac{|\tau|^2}{|e|^2}\cdot\frac{1}{|c|^2}\cdot\left|\frac{\lambda}{\tau}\right|^2$ bzw. $1N = \frac{m_{es}\cdot\lambda}{\tau^2}\cdot\frac{1}{\varphi}\cdot 2\cdot 10^{7}\cdot\frac{1}{|e\cdot c|^2}\cdot|\lambda|^2$.

Einsetzen von $\boxed{|\lambda|^2 = \frac{\lambda^2}{(1m)^2}}$ führt zu $2\cdot 10^{-7}\cdot N = \frac{2m_{es}\cdot\lambda}{\tau^2}\cdot\frac{1}{\varphi}\cdot\frac{2}{|e\cdot c|^2}\cdot\frac{\lambda^2}{(1m)^2}$ bzw.

$2\cdot 10^{-7}\cdot N = 2m_{ps}\cdot\frac{\varphi\,\alpha}{4\pi}\cdot\frac{\lambda^2}{\tau^2}\cdot\frac{1}{\varphi}\cdot\frac{2}{|e\cdot c|^2}\cdot\frac{\lambda}{(1m)^2}$ bzw. $2\cdot 10^{-7}\cdot N = \underbrace{\frac{\alpha\,hc}{4\pi}}_{=e^2/4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2}{|e\cdot c|^2}\cdot\frac{1}{(1m)^2}$ bzw.

(I.16)… $\boxed{2\cdot 10^{-7}\cdot N = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(xe)^2}{(1m)^2}}$ mit (I.17)… $\boxed{x^2 = \frac{2}{|e\cdot c|^2}}$

Damit ist sofort zu sehen, dass Formel (I.16) die Coulomb-Kraft $F = 2\cdot 10^{-7}\cdot N$ liefert, die im Abstand $(1m)$ herrscht, wenn $Q = q = xe$ Elementarladungen fließen. Die Anzahl x um pro $1s$ die Stromstärke von $1A$ zu erzeugen lässt sich leicht mit Hilfe der Coulomb-Formel $\boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Qq}{a^2}}$ berechnen, wenn für $Qq = (1As)^2 = x^2\cdot e^2$ und der Abstand von $(1m)$ angesetzt wird. Es ergibt sich dann per Definition die Coulombkraft $F = 2\cdot 10^{-7}\cdot N$.

Wir können also schreiben $2\cdot 10^{-7}\cdot N = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot x^2\cdot e^2\cdot\frac{1}{(1m)^2}$. Hieraus ergibt sich

$x^2 = 2\cdot 10^{-7}\cdot(1N)\cdot\frac{4\pi\varepsilon_0 c^2}{e^2c^2}\cdot\frac{1}{(1m)^2}$ bzw. $x^2 = 2\cdot 10^{-7}\cdot(1N)\cdot\frac{1}{(ec)^2\cdot\mu_0}\cdot\frac{4\pi}{}\cdot\frac{1}{(1m)^2}$ bzw.

$x^2 = 2\cdot 10^{-7}\cdot(1N)\cdot\frac{1}{(ec)^2}\cdot\frac{4\pi}{4\pi\cdot 10^{-7}}\cdot\frac{Am}{Vs}\cdot\frac{1}{(1m)^2}$ bzw. $x^2 = \cdot\frac{2}{|e\cdot c|^2}\cdot\left[\frac{Am}{Vs}\cdot\frac{N}{m^2}\cdot\frac{1}{(As)^2}\cdot\left(\frac{s}{m}\right)^2\right]$.

Die Dimensionen kürzen sich gegenseitig heraus und man erhält wieder $\boxed{x^2 = \cdot\frac{2}{|e\cdot c|^2}}$ **qed.**.

<u>Fazit</u>

Damit wurde der Beweis erbracht, dass mit Formel (I.10) der Wert der Gravitationskonstanten G mit einer um vier(!) Größenordnungen auf $\pm 5{,}0\cdot 10^{-8}$ verbesserten Genauigkeit berechnet werden kann <u>und</u> belegt zugleich die Richtigkeit der in Formel (I.2) für die Impedanz Z_0 angesetzten Erweiterung.